LU-DECOMPOSITIE VOOR LINEAIRE STELSELS

1) Los het stelsel

$$\sum_{j=1}^{n} i^{j-1} x_j = i \qquad 1 \leq i \leq n$$

op voor $n = 10, \ldots, 15$ met Gauss-eliminatie en partiële pivotering. Vergelijk de berekende oplossing $\tilde{x}$ met de exacte oplossing $x^* = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Vergelijk de exacte fout $x^* - \tilde{x}$ met de bovengrens voor $||x^* - \tilde{x}||$ uit de cursus.

2) Beschouw het benchmark probleem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \psi(n+i) - \psi(i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad x_j = 1$$

waar $\psi(\cdot)$ de digamma functie is. Bereken voor de opgegeven matrix A waarbij $n = 3, 6, 9, 12$ een schatting van het conditiegetal. Los het opgegeven stelsel voor $n = 3, 6, 9, 12$ op en bereken residu en error vector. Vergelijk de norm van de error vector met de bovengrens voor de voorwaartse fout uit de cursus.

3) Beschouw de matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ gedefinieerd als

$$\begin{aligned} a_{1j} &= 1 = a_{i1} \\ a_{ij} &= a_{i-1,j} + a_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Bereken voor $n = 5, 10$ de determinant van A uit de LU factorisatie van de matrix (zonder pivotering). Vraag ook het conditiegetal van de matrix op.

4) Beschouw de $n \times n$ Hilbert matrix

$$H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

- Bereken de determinant voor $n = 3, 6, 9, 12$ (leg uit hoe LU factorisatie hiervoor gebruikt kan worden).
- Bereken een schatting voor het conditiegetal $\kappa(H_n)$ voor verschillende waarden van n.

5) Beschouw het benchmark probleem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \binom{n+i-1}{i} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} \qquad x_j = 1$$

Bereken een schatting van het conditiegetal voor de opgegeven matrix A waarbij $n = 3, 6, 9, 12$. Los het opgegeven stelsel voor $n = 3, 6, 9, 12$ op en bereken residu en error vector. Bespreek residu, error, conditiegetal en de relatie tussen deze grootheden.