

## COMPUTER ARITMETIEK

- 1) Bereken met 7 beduidende cijfers een benadering voor  $\exp(-20.5)$ , door gebruik te maken van de reeksontwikkeling

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Gebruik voor de reeks geen stopcriterium dat gebruik maakt van het exacte resultaat  $\exp(x)$  (je bent dit immers aan het berekenen). Realistisch is om 2 opeenvolgende partieelsommen uit de reeks te vergelijken.

- 2) Welke is de voorstelling van  $x = 1 - 2^{-t}$  in de floating-point notatie met basis  $\beta = 2$ , precisie  $t$  en exponentbereik  $L \leq -1 \leq U$ ? En van  $y = 1000075541$ , in de 4 afrondingsmodes “up”, “down”, “nearest” en “to zero” met een gepaste keuze voor  $t, L, U$ ?

Hoeveel floats liggen er in het interval  $[\beta^{e-1}, \beta^e[$  met  $L \leq e \leq U$ , voor een gegeven precisie  $t$  en basis  $\beta$ , wanneer de floats worden voorgesteld als

$$f = \pm(d_0.d_1d_2 \dots d_{t-1}) \times \beta^e \quad d_0 \neq 0$$

Hoe groot is de afstand tussen 2 opeenvolgende floats in dit interval?

- 3) We veronderstellen over een volledig IEEE compliant FPU te beschikken.

▪ Beschouw

$$r_0 = 1 + 2^{-1} + 2^{-24}$$

$$= 1.500000059604644775390625$$

$$r_1 = 1 + 2^{-1} + 2^{-24} + 2^{-53}$$

$$= 1.50000005960464488641292746251565404236316680908203125$$

$$r_2 = 1 + 2^{-1} + 2^{-24} + 2^{-52}$$

$$= 1.50000005960464499743522992503130808472633361816440625$$

en stel deze reals voor in IEEE dubbele precisie in de rounding modes “up”, “down” en “nearest”, waarbij je even mag veronderstellen over een compiler te beschikken die de volledige decimale strings in rekening brengt.

▪ Beschouw

$$s_1 = 1.50000005960464483$$

$$s_2 = 1.50000005960464493$$

en stel deze reals ook voor in IEEE dubbele precisie in de rounding modes “up”, “down” en “nearest”. De meeste commerciële compilers verwerken decimale strings van deze lengte nog net.

- 4) Bereken in Matlab de constante  $e$  uit de wiskundige definitie

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

Neem hierbij  $n = 10^k$  met  $k = 1, 2, \dots, 20$ . Schrijf voor de eenvoud de machtsverheffing als herhaalde vermenigvuldiging. Vergelijk de waarden die je bekomt met een print van  $e$  in hoge precisie. Wat is er misgelopen? Leg gedetailleerd uit.

- 5) Hoe evalueer je  $y = e^x - e^{-2x}$  voor  $x \approx 0$ ? En hoe  $y = \sqrt{x+4} - 2$  voor  $x \approx 0$ ? Bedoeling is om “cancellation” te vermijden.
- 6) Bereken in Matlab de uitdrukking  $f(x) = (\exp(x) - 1)/x$  voor  $x = 10^{-k}$  met  $k = 1, 2, \dots, 9$ . Wat denk je (uit je basiscursussen) dat de waarde van

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \dots$$

is? Is dit in overeenstemming met de trend die je in Matlab hebt vastgesteld? Hoe dien je  $f(x) = (\exp(x) - 1)/x$  te herschrijven voor numerieke berekening?