STELSELS LINEAIRE VERGELIJKINGEN

Een kort verslag van de oplossing van opgave 3), inclusief de bijbehorende code, wordt individueel ingediend uiterlijk op 09/03/2021 bij `Ferre.Knaepkens@uantwerpen.be`.

1) Beschouw de 4×4 Vandermonde matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{pmatrix}$$

Gebruik de formules voor de multipliers en de eliminatiestappen (zonder pivotering) om te bekomen dat de matrix V kan gefactoriseerd worden als $V = LU$ met

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_0^2 & x_1 + x_0 & 1 & 0 \\ x_0^3 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & x_2 + x_1 + x_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ 0 & 0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) & (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \\ 0 & 0 & 0 & (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{pmatrix}$$

2) Los het volgende 3×3 stelsel op met behulp van GEPP (MATLAB implementatie op de cursus webpagina):

$$\begin{pmatrix} 3.021 & 2.714 & 6.913 \\ 1.031 & -4.273 & 1.121 \\ 5.084 & -5.832 & 9.155 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 12.648 \\ -2.121 \\ 8.407 \end{pmatrix}$$

Verander nu $a_{2,2}$ in -4.275 en los opnieuw het stelsel op. Wat stel je vast?

3) Beschouw de matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ gedefinieerd als

$$\begin{aligned} a_{1j} &= 1 = a_{i1} \\ a_{ij} &= a_{i-1,j} + a_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Bereken de determinant van A uit de LU factorisatie van de matrix (zonder pivotering). Programmeer hiervoor Gaussische eliminatie in MATLAB voor $n = 5, 15, 25, 35$. Bespreek je resultaat.

4) Voer een operation count door voor Gaussische eliminatie met partiële pivotering, zoals gegeven in de les. Breng ook, maar apart, de terugsubstitutie in rekening in deze operation count.

5) Gegeven zijn de matrices $M_k, k = 1, \ldots, n-1$ met 1 op de diagonaal en in kolom k onder de diagonaal de multipliers uit stap k van Gaussische eliminatie zonder pivotering. Bewijs de expliciete uitdrukking voor M_k^{-1} en voor $M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$.