NUMERIEKE STABILITEIT EN CONDITIONERING

1) Waarom convergeert de divergente reeks

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

wel op je computer? Hoe heb je de reeks gesommeerd?

2) De Fibonacci-getallen zijn een rij integers gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n-1}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Gegeven is nu

$$\begin{aligned} f_{78} &= 14472334024676221, \\ f_{77} &= 8944394323791464. \end{aligned}$$

Start met f_{78} en f_{77} om de rij achterwaarts te berekenen via

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n, \qquad n \geq 1.$$

Kan je f_0 en f_1 terugvinden als je floating-point aritmetiek gebruikt (ter informatie: $2^{53} - 1 = 9007199254740991$)?

3) Bereken de interpolerende veelterm $p(x)$ van graad 4 door de data $x_i = 1920 + 20i$ voor $i = 0, \ldots, 4$ met $y = (105.711, 131.669, 179.323, 226.505, 281.422)$, door het 5×5 stelsel interpolatievoorwaarden op te lossen. Dit zijn censusdata van de USA.

Vraag het conditiegetal van de Vandermonde coëfficiëntenmatrix op en bereken ook de norm van de residuvector. We zijn geïnteresseerd in $p(2020)$ voor vergelijking met latere technieken.

Herschaal de x_i naar $t_i = (x_i - 1960)/40, i = 0, \ldots, 4$ en los het probleem opnieuw op. Vraag weer het conditiegetal op en bereken de norm van de residuvector!

4) Bewijs dat voor het berekenen van een interpolerende veelterm in de Lagrange basis,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x), \qquad \ell_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^{n} (x_i - x_j)},$$

vertrekkend van $n+1$ functiewaarden $f = (f_0, \ldots, f_n)$ met $f_i = p(x_i)$, geldt dat voor de evaluatie in $x \in [a,b]$ van een geperturbeerde veelterm $\tilde{p}(x)$ opgesteld met geperturbeerde $\tilde{f}_i$, de fout in de evaluatie begrensd wordt door

$$\frac{||p-\tilde{p}||_\infty}{||p||_\infty} \leq \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \, \frac{||f-\tilde{f}||_\infty}{||f||_\infty}.$$

Voor dit numeriek algoritme zijn de data de functiewaarden f_i in de punten x_i (deze laatste mag je exact voorstelbaar veronderstellen) en is de output het functievoorschrift $p(x)$.

5) Beschouw de $n \times n$ Hilbert matrix

$$H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

en voer de volgende opdracht uit voor $n = 3, 6, 9, 12$.

Los $Ax = y$ op waarbij de rechterleden y de opeenvolgende kolommen zijn van de $n \times n$ eenheidsmatrix. Op deze manier berekenen we de opeenvolgende kolommen x in de inverse van de Hilbert matrix.

Vergelijk voor elke berekende kolom (MATLAB default `ULP` $= 2^{-52}$), de floating-point oplossing $\tilde{x}$ met de exacte oplossing x^*.