SPLINE-INTERPOLATIE

Een kort verslag van de oplossing van opgave 2 wordt individueel ingediend uiterlijk op 23/02/2021, 12.00 uur bij `Ferre.Knaepkens@uantwerpen.be`, samen met de bijbehorende code.

1) Controleer of

$$C(x) = \begin{cases} 28 + 25x + 9x^2 + x^3 & -3 \leq x \leq -1 \\ 26 + 19x + 3x^2 - x^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ 26 + 19x + 3x^2 - 2x^3 & 0 \leq x \leq 3 \\ -163 + 208x - 60x^2 + 5x^3 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

een natuurlijke kubische spline is.

2) Beschouw de datapunten $(t_i, y_i), i = 0, \ldots, 4$ gegeven door

$$(0, 8), (1, 12), (3, 2), (4, 6), (8, 0).$$

Bereken de interpolerende veelterm van graad 4 door deze punten. Vergelijk de interpolant met de natuurlijke kubische spline door dezelfde punten. Commentarieer.

3) Neem de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < -0.5 \\ 1 - |2x| & -0.5 < x < 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1.0 \end{cases}$$

- Neem equidistante interpolatiepunten en bereken de interpolerende veeltermen van graad 2, 3 en 4.
- Bereken met 5 equidistante datapunten tevens de natuurlijke cubische spline en de cubische spline waarbij als extra voorwaarden wordt opgegeven

$$s_0''(x_0) = \frac{(x_2 - x_0)s_1''(x_1) - (x_1 - x_0)s_2''(x_2)}{x_2 - x_1}$$
$$s_3''(x_4) = \frac{(x_4 - x_2)s_3''(x_3) - (x_4 - x_3)s_2''(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Wat betekenen deze speciale splinecondities (plot de tweede afgeleide van beide cubische splines)? Plot alle functies ten opzichte van $f(x)$ en bespreek de verschillende interpolanten.

4) Bewijs dat de trapeziumregel voor de numerieke berekening van

$$\int_a^b f(x)dx$$

neerkomt op het berekenen van een spline $S(x)$ van eerste graad voor f en deze te integreren:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b S(x)dx$$

5) Hieronder vind je een dataset die het specifieke profiel van een kleine wagen weergeeft. Bereken de interpolerende veelterm door die datapunten. Bereken ook de natuurlijke kubische spline.

x_i	f_i
22	2
21.75	4
21.4	5
21.2	6.1
21	6.5
20	7.5
19	8.3
18	9
16	10.3
14	11.6
13	12.2
12	12.5
10	12.75
8	12.75
6	12.625
4	12.5
3	12.4
2	12.35

De x-waarden liggen in het interval $[2, 22]$. Kies nu $x_0 = 2, x_i - x_{i-1} = 2, i = 0, \ldots, 10$, wat minder datapunten oplevert. Bereken opnieuw de interpolerende veelterm en de kubische spline. Wat stel je vast?