KLEINSTE KWADRATEN

De (pen en papier) oplossing van de opgaven 2) en 3) wordt individueel ingediend uiterlijk 30 maart 2020 voor de practicumsessie.

1) Bewijs dat de constante kleinste kwadraten benadering (Euclidische norm) van een verzameling getallen het gemiddelde van de getallen is.

2) Bereken met behulp van de kleinste kwadraten methode een best fit van de vorm $y(x) = a\exp(x^2) + bx^3$ aan de datapunten $(-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

3) Bereken de beste rechte $y = ax + b$ in de zin van de kleinste kwadraten, voor de functie $f(x) = \exp(x)$ op het interval $[0, 1]$. Kies voor de gewichtsfunctie in de normdefinitie $w(x) = 1$.

4) Bewijs dat als de rechthoekige $m \times n$ matrix A met $m > n$ maximale kolomrang n heeft, dan de matrix A^TA regulier is (hint: bekijk x^TA^TAx).

5) Bereken de kleinste kwadraten veelterm $p(x)$ van graad 2 voor de data $x_i = 1920 + 20i, i = 0, \ldots, 4$ met $y = (105.711, 131.669, 179.323, 226.505, 281.422)$. Dit zijn censusdata van de USA.
Vraag het conditiegetal van het stelsel normaalvergelijkingen op en bereken ook de norm van de residuvector.
Herschaal de x_i naar $t_i = (x_i - 1960)/40, i = 0, \ldots, 4$ en los het probleem opnieuw op. Vraag weer het conditiegetal op en bereken de norm van de residuvector.

6) Gegeven zijn de lineair onafhankelijke basisfuncties

$$\phi_{3i}(x) = \binom{3}{i}(x/8)^i(1 - x/8)^{3-i} \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Bereken de optimale lineaire combinatie

$$\phi(x) = \lambda_0\phi_{3,0}(x) + \lambda_1\phi_{3,1}(x) + \lambda_2\phi_{3,2}(x) + \lambda_3\phi_{3,3}(x)$$

die de fout

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{19}(\phi(x_j) - y_j)^2}$$

minimaal maakt voor de data gegeven in

j	x_j	y_j	j	x_j	y_j
0	0.0	−0.80	10	3.6	0.74
1	0.6	−0.34	11	4.7	−0.82
2	1.5	0.59	12	5.2	−1.27
3	1.7	0.59	13	5.7	−0.92
4	1.9	0.23	14	5.8	−0.92
5	2.1	0.10	15	6.0	−1.04
6	2.3	0.28	16	6.4	−0.79
7	2.6	1.03	17	6.9	−0.06
8	2.8	1.50	18	7.6	1.00
9	3.0	1.44	19	8.0	0.00