

TRIGONOMETRISCHE INTERPOLATIE

1) Laat de periodische waarden f_k gegeven zijn in de punten $x_k = 2k\pi/N, k = 0, \dots, N$. Leid de volgende formules af:

- Voor $N = 2M$ even, worden de coëfficiënten in de trigonometrische interpolant van de vorm

$$s_M^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{M-1} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) + \frac{a_M}{2} \cos(Mx)$$

gegeven door

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f_k \cos(jx_k),$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f_k \sin(jx_k).$$

- Voor $N > 2L + 1$, worden de coëfficiënten in de trigonometrische kleinste kwadraten approximant van de vorm

$$S_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^L (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

gegeven door dezelfde formules.

2) Beschouw de equidistante punten $x_k = 2k\pi/8, k = 0, \dots, 7$ en daarin de functiewaarden $f(x_k) = 1, k = 0, \dots, 3$ en $f(x_k) = -1, k = 4, \dots, 7$ die komen van de functie

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Maak de functie periodisch. Bereken de beste trigonometrische veelterm van de vorm

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x).$$

Bereken tevens de interpolerende trigonometrische veelterm waarin de 8 basisfuncties $1, \cos(x), \sin(x), \dots, \sin(3x), \cos(4x)$ worden gebruikt. Plot beide benaderingen ten opzichte van de 8 datapunten.

3) Bewijs dat het product van een trigonometrische veelterm van graad n met een trigonometrische veelterm van graad m een trigonometrische veelterm van graad $n + m$ oplevert.

- 4) De Chebyshev veeltermen (van de eerste soort) $T_n(x)$ voldoen ook aan de volgende discrete orthogonaliteit. Laat

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Bewijs dat voor $0 \leq i, j < N$ geldt dat

$$\sum_{k=0}^{N-1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N, & i = j = 0 \\ N/2, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

- 5) Beschouw de verzameling M van de functies $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in [0, \pi]$.
- Toon aan dat deze verzameling M aan de Haarvoorwaarde voldoet.
 - Karakteriseer de beste benadering volgens $\|\cdot\|_\infty$ uit span M .