RATIONALE INTERPOLATIE

1) Bereken de rationale interpolant van graad 3 in de teller en graad 2 in de noemer door de data $f(0) = 9/2, f(1) = 1/5, f(2) = 2/3, f(3) = 0, f(4) = -1/4, f(5) = -2/9$. Welk punt is niet "attainable"? Verhoog nu de graad in de noemer tot 3 en geef alle rationale functies die aan bovenstaande interpolatievoorwaarden voldoen. Er zijn voor de gegeven data meerdere oplossingen omdat we nu een vrije coefficiënt meer hebben.

   - Maak een grafiek van $r_{3,2}(x)$ en een particuliere $r_{3,3}(x)$ die wel aan alle interpolatievoorwaarden voldoet, op eenzelfde plot.
   - Waarom zijn nu alle oplossingen voor $r_{3,3}(x)$ niet meer "equivalent" en stellen zij niet dezelfde onherleidbare functie voor?

2) Beschouw de functie $f(x) = \mathrm{atan}(3x)$ op het interval $[-1, 1]$. Bereken de rationale interpolant van graad 5 in de teller en 4 in de noemer door enerzijds de equidistante punten $x_i = -1 + 2i/9, i = 0, \ldots, 9$ en anderzijds de nulpunten van de Chebyshev veelterm $T_{10}(x)$. Plot dan voor beide interpolanten $r_{5,4}(x)$ de foutenkromme $f(x) - r_{5,4}(x)$. Is de situatie analoog aan die bij veelterminterpolatie?

3) We gaan verder met de functie $f(x) = \mathrm{atan}(3x)$ op het interval $[-3, 3]$ en de equidistante punten $x_i = -3 + 6i/5, i = 0, \ldots, 5$. Kies a priori de noemerveelterm

$$q(x) = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \prod_{j=0, j \neq i}^{5} (x - x_j),$$

en bereken $p(x)$ van graad 5 die voldoet aan

$$(fq)(x_i) = p(x_i), \qquad i = 0, \ldots, 5.$$

Deze veelterm heeft geen reële nulpunten, en is dus heel geschikt voor rationale interpolatie met voorbestemde noemer. Plot de Lebesgue functie die hoort bij dit interpolatieprobleem.

4) Geef een determinantvoorstelling voor de rationale interpolant van graad m in de teller en n in de noemer die de data $f_j, j = 0, \ldots, m + n$ interpoleert, in de gelineariseerde zin.