

Project GNM 2020–2021

1. Reële Vandermonde matrices

Gestructureerde matrices hebben de reputatie om slecht geconditioneerd te zijn. We onderzoeken het conditiegetal $\kappa_2(V_n)$ van de $(n+1) \times (n+1)$ Vandermonde matrix V_n voor punten $x_0 < \dots < x_n \in [-1, 1]$ en stellen een exponentiële groei vast. Bereken hiertoe voor een aantal n en een variatie aan punten $x_i \in [-1, 1]$ het conditiegetal $\kappa_2(V_n)$. Kies voor de x_i onder andere:

- equidistante punten,
- Chebyshev knooppunten,
- Chebyshev extrema,
- n oneven: $x_{n-i} = -x_i$ met $x_n = 2^{-1}, x_{n-1} = 2^{-2}, \dots, x_{(n+1)/2} = 2^{-(n+1)/2}$ en n even: zoals hiervoor met daarbij $x_{n/2} = 0$,
- een aantal random selecties.

Als je $\kappa_2(V_n)$ uitzet tegenover n (en dit voor verschillende keuzes voor de punten x_i op eenzelfde grafiek), dan blijkt

$$\min_{x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]} \kappa_2(V_n)$$

niet onder een bepaalde functie van n te kunnen gaan. Vind experimenteel een uitdrukking

$$f(n) \leq \min_{x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]} \kappa_2(V_n).$$

Verifieer of de uitdrukking $f(n)$ ook geldt als ondergrens voor het Euclidische conditiegetal van de rechthoekige $N \times (n+1)$ Vandermonde matrix waarbij $N > n$, dus zonder toevoegen van knooppunten maar met ophogen van de graad tot $N-1$ (varieer N in dit experiment).

2. Complexe Vandermonde matrices

Dit ongelukkig groeiend conditiegetal kan vermeden worden op één van de volgende manieren:

- Kies met reële interpolatiepunten een orthogonale veeltermbasis om de interpolerende veelterm in uit te drukken (Chebyshev, Legendre, ...).
- Verplaats de interpolatiepunten naar de eenheidscirkel, $x_i = \exp(i\theta_i), 0 \leq \theta_i \leq 2\pi$ met verschillende locaties voor de θ_i .
- Vergeet vooral niet om de interpolatiepunten op de eenheidscirkel ook eens equidistant te kiezen. Voor het overige kan je ze gewoon random variëren, ook in aantal.

Vraag is om opnieuw het conditiegetal uit te zetten tegenover de dimensie van de Vandermonde matrix. We verwachten ditmaal geen conjecture, enkel een aantal observaties. Onderzoek ook opnieuw de invloed van het verhogen van de machten in de matrix, m.a.w. plot ook het conditiegetal voor het rechthoekige geval.