

LEBESGUE CONSTANTEN

- 1) Beschouw veelterminterpolatie door drie punten in het interval $[-1, 1]$, namelijk $x_0 = -a, x_1 = 0, x_2 = a$. Voor welke waarde(n) van a is de Lebesgue constante minimaal? Maak een grafiek van

$$\sum_{k=0}^2 |\ell_k(x)|, \quad \ell_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^2 (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^2 (x_k - x_j)}$$

voor optimale a en niet-optimale a .

- 2) Beschouw veelterminterpolatie door drie punten in het interval $[-1, 1]$, namelijk $x_0 = -1, x_1 = b, x_2 = 1$. Voor welke waarde(n) van b is de Lebesgue constante minimaal? Maak opnieuw een grafiek zoals in de vorige vraag, ditmaal voor optimale b en niet-optimale b .

- 3) Beschouw de functies $f(x) = |x|$ op $[-1, 1]$ en $f(x) = \arctan(x)$ op $[-3, 3]$.
- Bereken voor ieder de veelterminterpolanten (Lagrange vorm) van graad 10 en 20 door equidistante interpolatiepunten.
 - Vergelijk het conditiegetal van de Vandermonde matrix voor graad 10 en 20 met de Lebesgue constante voor graad 10 en 20.
 - Bereken nu de veelterminterpolanten (Lagrange vorm) van graad 10 en 20 door de Chebyshev knooppunten (nulpunten).
 - Vergelijk opnieuw het conditiegetal van de Vandermonde matrix voor graad 10 en 20 met de Lebesgue constante voor graad 10 en 20.
 - Plot de errorfuncties $f - p_n$ en vergelijk $\|f - p_n\|$ met de bovengrenzen

$$\max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \|(x - x_0) \cdots (x - x_n)\|$$

en

$$(1 + \|P_n\|) \|f - p_n^*\|$$

waarbij $\|f - p_n^*\|$ voor $n = 10, 20$ en voor $f(x) = |x|$ en $f(x) = \arctan(x)$ gevonden wordt bij de Lebesgue illustraties die op de homepage staan.

- 4) Compute the interpolating polynomial $p(x)$ of degree 8 through the datapoints

x_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
f_i	100.0	117.7	139.3	179.3	219.3	249.1	267.5	291.5	326.4

where $i = 1, \dots, 9$. We explore different forms for $p(x)$. Compute an estimate for the condition number in each of the cases:

- a) Use the power basis with the given interpolation points x_i .
- b) Transform the x_i to $[-1, 1]$ and then use the power basis.
- c) Use a basis orthogonal on $[-1, 1]$ such as Legendre or Chebyshev polynomials.
- d) Use the Lagrange basis.

Write down the linear systems of interpolation conditions in the first three cases and compute the condition number. In the fourth case the condition number is the Lebesgue constant.