BESTE BENADERINGEN

1) Laat $e \in C([a,b])$. Bewijs de volgende ongelijkheid voor de 1-, 2- en ∞-norm:

$$||e||_1 \leq \sqrt{b-a}||e||_2 \leq (b-a)||e||_\infty.$$

Hieruit blijkt dat het bijzonder interessant is om een fout klein te krijgen in de ∞-norm.

2) We beschouwen de eindig-dimensionale deelruimte P_n van de veeltermen van graad hoogstens n in de ruimte $C([a,b])$ van continue functies op het interval $[a,b]$. Bewijs dat voor een positieve gewichtsfunctie $w(x)$ en de ℓ_2-norm

$$||f(x)||_2^2 = \int_a^b f^2(x)w(x)\,dx$$

de volgende karakterisatie van de beste benadering van $f(x)$ in P_n geldt. De veelterm $p^*(x)$ is de beste benadering van $f(x)$ in P_n als en slechts als

$$\int_a^b (f-p^*)(x)p(x)w(x)\,dx = 0, \qquad p(x) \in P_n.$$

3) Bereken de Chebyshev reeksontwikkeling van de functie $\log(1+x)$ op het interval $[-1,1]$. Bekijk en plot een aantal foutenkrommen $(f - C_n)(x)$ waarbij $C_n(x)$ de n-de partieelsom is van de reeksontwikkeling (inclusief $T_n(x)$). Zou een beste uniforme veeltermbenadering voor $\log(1+x)$ de benaderingen nog veel verbeteren?

4) Beschouw de partieelsom $C_9(x)$ van graad 9 van de Chebyshev reeksontwikkeling voor $\arctan(x)$. Selecteer 11 verschillende punten $x_0, \ldots, x_{10}$ in de buurt van de extrema van $\arctan(x) - C_9(x)$ en rangschik ze $x_{10} < \ldots < x_0$. Vervolgens voeren we de volgende stappen uit:

- bereken de interpolerende veelterm $S(x)$ van graad 10 door $(x_k, \arctan(x_k))$ voor $k = 0, \ldots, 10$,
- bereken de interpolerende veelterm $T(x)$ van graad 10 door $\big(x_k, (-1)^k\big)$ voor $k = 0, \ldots, 10$,
- noem de coefficienten van graad 10 in S en T respectievelijk σ en τ en bereken $R(x) = S(x) - \sigma/\tau T(x)$,
- leg uit waarom gegarandeerd is dat $\tau \neq 0$ en geef de graad van $R(x)$ en de interpolatievoorwaarden waaraan $R(x)$ voldoet.

Is $R(x)$ een betere benadering voor $\arctan(x)$ dan $C_9(x)$ (plot de curve $\arctan(x) - R(x)$)?

5) Beschouw de constante functie $f(x) = 1 \in C([-1,1])$ en neem $M = \text{span}\{x\}$. Geef minstens één beste benadering voor $f(x)$ volgens het criterium van de ℓ_1-norm

$$||f||_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx.$$